ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

---------------🙞📖🙜---------------

DƯƠNG THỊ THU HẰNG

NHỮNG CẢN TRỞ ĐỐI VỚI SỰ THÁC TRIỂNÁNH XẠ CHỈNH HÌNH VÀ ÁNH XẠ PHÂN HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

---------------𝕮📖𝕯---------------

DƯƠNG THỊ THU HẰNG

NHỮNG CẢN TRỞ ĐỐI VỚI SỰ THÁC TRIỂN ÁNH XẠ CHỈNH HÌNH VÀ ÁNH XẠ PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Cán bộ hướng dẫn khoa học:

TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai

Thái Nguyên, năm 2020

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi với sự hướng dẫn tận tình của TS. Nguyễn Thị Tuyết Mai, các kết quả nghiên cứu là trung thực và chưa được công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Tác giả luận văn

Dương Thị Thu Hằng

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên. Trong quá trình làm khóa luận tốt nghiệp em đã nhận được rất nhiều sự giúp đỡ để hoàn tất luận văn.

Đầu tiên em xin gửi lời cảm ơn chân thành tới cô Nguyễn Thị Tuyết Mai, giảng viên khoa Toán trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức, kinh nghiệm cho em trong suốt quá trình thực hiện luận văn tốt nghiệp này.

Xin gửi lời cảm ơn đến quý thầy cô Khoa Toán, trường Đại học Sư phạm – Đại học Thái Nguyên , Viện Toán học và trường Đại học Sư phạm Hà Nội những người đã truyền đạt kiến thức quý báu cho em suốt trong thời gian học tập vừa qua.

Cuối cùng, em xin cảm ơn những người thân, bạn bè đã luôn ở bên động viên em hoàn thành khóa học và bài luận văn này.

Trong bài luận, chắc hẳn không thể tránh khỏi những hạn chế và thiếu sót. Em mong muốn sẽ nhận được nhiều đóng góp quý báu đến từ các quý thầy cô, ban cố vấn và bạn đọc để đề tài được hoàn thiện hơn nữa.

Một lần nữa, xin trân trọng cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Người viết luận văn

Dương Thị Thu Hằng

MỤC LỤC

LỜI MỞ ĐẦU

Bài toán về sự thác triển của ánh xạ chỉnh hình và ánh xạ phân hình được bắt đầu như sau:

Kí hiệu:

$$H_r = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z| < r, |w| < 1 \text{ hoặc } |z| < 1, 1 - r < |w| < 1\}$$

là miền Hartogs trong $\mathbb{C}^2$, $0 < r < 1$.

Định nghĩa 0.1. Đa tạp phức X được gọi là *có tính chất thác triển chỉnh hình (phân hình)* nếu tồn tại ánh xạ chỉnh hình (phân hình) $f : H_r \to X$ thác triển thành ánh xạ chỉnh hình (phân hình) $f : \Delta^2 \to X$, trong đó Δ^2 là bao chỉnh hình của H_r.

Một câu hỏi tự nhiên được đặt ra là: Điều kiện cần và đủ để một đa tạp phức X có tính chất thác triển chỉnh hình (phân hình) là gì? Câu hỏi này đã mở ra một hướng nghiên cứu mới của giải tích phức trong những năm cuối thế kỉ 20. Kiernan, Griffiths, Siu, … đã thu được một vài kết quả nghiên cứu theo hướng này. Ivashkovitch (trong [8] và [9]) đã chứng minh được rằng: mọi đa tạp Kähler phức X có tính chất thác triển chỉnh hình khi và chỉ khi X là lồi phức và không chứa đường cong hữu tỉ. Chứng minh rằng bất kì đa tạp Kähler compact đều có tính chất thác triển phân hình là một vấn đề không giải được nổi tiếng.

Ivashkovitch [10] đã nghiên cứu sự thác triển của ánh xạ chỉnh hình và ánh xạ phân hình vào đa tạp phức mà có metric Hermit đa đóng. Ví dụ, mọi siêu mặt phức compact đều có một metric như thế. Đồng thời, Ivashkovitch [8], đã mô tả sự cản trở việc thác triển ánh xạ chỉnh hình (phân hình) trong trường hợp X là siêu mặt phức compact, tức là những đa tạp phức compact có số chiều phức bằng 2. Trong [8] ông đã sử dụng kĩ thuật và các kết quả của Kodaira trên siêu mặt. Kĩ thuật này không thể áp dụng trong trường hợp siêu mặt $V \|_0$. Để khắc phục khó khăn này, Ivashkovitch đưa ra một cách khác, đó là dùng metric đa đóng và 'vỏ cầu'. Nhờ kĩ thuật này, ông đã chứng minh được rằng "vỏ cầu" và đường cong hữu tỉ là những cản trở đối với sự thác triển kiểu Hartogs của ánh xạ chỉnh hình và ánh xạ phân hình.

Mục đích của luận văn “*Những cản trở đối với sự thác triển ánh xạ chỉnh hình và ánh xạ phân hình”* là nghiên cứu và trình bày lại một cách chi tiết có hệ thống kết quả nghiên cứu của Ivashkovitch trong [10] về những cản trở của việc thác triển ánh xạ chỉnh hình (phân hình).

Nội dung luận văn ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo thì còn được chia làm 2 chương:

Chương 1: Trình bày kiến thức chuẩn bị bao gồm các định nghĩa và các tính chất của đa tạp phức, miền Hartogs, dòng đa xác định, đa tạp lồi phức, thác triển chỉnh hình, thác triển phân hình; bất đẳng thức Chern - Levine – Nirenberg và vỏ cầu.

Chương 2: Trình bày về sự cản trở của vỏ cầu và đường cong hữu tỉ đối với sự thác triển ánh xạ chỉnh hình và ánh xạ phân hình.

CHƯƠNG 1
KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

1.1. Đa tạp phức

Giả sử X là một không gian tô pô Hausdorff.

Định nghĩa 1.1.1.

Cặp (U,φ) được gọi là một *bản đồ địa phương* của X, trong đó U là tập mở trong X và $\varphi: \ U \to C^n$ là ánh xạ từ X vào C^n, nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\varphi(U)$ là tập mở trong C^n.

ii) $\varphi: \ U \to \varphi(U)$ là một đồng phôi.

Định nghĩa 1.1.2.

Họ $\mathcal{A} = \{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in I}$ các bản đồ địa phương của X được gọi là một *tập bản đồ giải tích (atlas) của* X nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

i) $\{U_i\}_{i\in I}$ là một phủ mở của X.

ii) Với mọi U_i, U_j mà $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, ánh xạ

$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}: \ \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ là ánh xạ chỉnh hình.

Định nghĩa 1.1.3.

Xét họ các atlas trên X. Hai atlas $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ được gọi là tương đương nếu $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ là một atlas. Đây là một quan hệ tương đương trên tập các atlas. Mỗi lớp tương đương xác định cấu trúc khả vi phức trên X. X cùng với cấu trúc khả vi phức trên nó được gọi là một *đa tạp phức* n *chiều*.

Ví dụ 1.1.4.

+ Cho $D \subset \mathbb{C}^n$ là một miền. Khi đó D là một đa tập phức n chiều với đa tạp địa phương $\{(D, Id_D)\}$.

+ Đa tạp xạ ảnh $P^n(C)$.

Xét $U_i = \{[z_0 : z_1 : ... : z_n] \in P^n(C) \mid z_i \neq 0\}$ với $i = 0,1...,n.$ Rõ ràng $\{U_i\}_{i=1}^n$ là một phủ mở của $P^n(C).$

Xét các đồng phôi $\varphi_i : U_i \rightarrow C^n$

$$[z_0 : z_1 : ... : z_n] \mapsto (\frac{z_0}{z_i}, ..., \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, ..., \frac{z_n}{z_i}).$$

Ta có

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : (z_0 : z_1 : ... : z_n) \mapsto (\frac{z_k}{z_j})_{k \neq j}; k = 0, ..., m; z_i = 1.$$

Rõ ràng $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ là ánh xạ chỉnh hình. Vậy $P^n(C)$ là một đa tạp phức n chiều và gọi là đa tạp xạ ảnh n chiều.

1.2. Miền Hartogs

Định nghĩa 1.2.1. [10]

Cho V là miền khác rỗng trên đĩa đơn vị $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Kí hiệu: $H_{V,r} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 \in V, z_2 \in \Delta \text{ or } z_1 \in \Delta, 1 - r < |z_2| < 1\},$

trong đó $0 < r < 1$. $H_{V,r}$ được gọi là *miền Hartogs* trên V.

Đặc biệt, nếu $V = \Delta_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ thì $H_{V,r} = H_r$.

Theo định lý cổ điển của Hartogs bao chỉnh hình của $H_{V,r}$ là song đĩa đơn vị Δ^2.

Định nghĩa 1.2.2.

Không gian giải tích phức Z được gọi là có *tính chất thác triển Hartogs* với p chiều nếu mọi ánh xạ $f \in O(H_p(r), Z)$ đều thác triển tới ánh xạ $f \in O(E^p, Z)$. Hơn nữa, Z được gọi là có tính chất thác triển Hartogs nếu nó có tính chất thác triển Hartogs với mọi chiều $p \geq 2$. Trong đó $H_p(r)$ là lược đồ Hartogs p chiều.

Kết quả cổ điển của Ivashkovitch ([9]) nói rằng nếu Z được gọi là có tính chất thác triển Hartogs trong 2 chiều thì nó sẽ đúng với mọi số chiều $p \geq 2$. Shiffman đã chứng minh được một đặc trưng quan trọng của không gian có tính chất thác triển Hartogs sau:

Định lý 1.2.3 *Không gian giải tích phức Z có tính chất thác triển Hartogs nếu và chỉ nếu với mọi miền D của đa tạp Stein M, mọi ánh xạ $f \in O(D,Z)$ đều thác triển được thành ánh xạ $f \in O(D,Z)$, trong đó D là bao chỉnh hình của D.*

1.3. Dòng đa xác định

Định nghĩa 1.3.1. [10]

Cho T là dòng song chiều (p,p) trong miền $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Dòng T được gọi là *chuẩn tắc* nếu T và dT có độ đo hệ số.

+ T được gọi là *dòng đa dương* nếu T là chuẩn tắc, không âm và dd^cT cũng không âm.

+ T được gọi là *dòng đa âm* nếu dòng T là chuẩn tắc, âm và dòng dd^cT là âm.

Định nghĩa 1.3.2. [10]

Cho T là dòng song chiều (p,p). T được gọi là *dòng đa đóng* nếu $dd^cT = 0$.

Định nghĩa 1.3.3.

Nhắc lại *khối của dòng T* có số chiều k trong tập mở $U \subset \Omega$ là

$$\| T \| (U) = \sup\{ | T(u) | : u \in D^k(U), | u(x) | \le 1, \forall x \in U \}.$$

Trong đó $D^k(U)$ là không gian các k- dạng trơn với giá compact trong U. $| u(x) |$ là chuẩn Euclidean của $k-$đối véctơ $u(x)$.

Hơn nữa, cho K là tập con đóng của Ω và T là một dòng trong $\Omega \setminus K$ với độ đo hệ số. Ta nói rằng T có khối hữu hạn điạ phương trong lân cận của K nếu với mọi tập mở $K \subset U \subseteq \Omega, \| T \| (U \setminus K) < \infty$.

Nhắc lại rằng thác triển tầm thường $\tilde{T}$ của dòng T từ $\Omega \setminus K$ tới Ω được xác định như sau:

Cho $\{u_n\}$ là một dãy của hàm khả vi lớp C^∞ trong Ω, $0 \le u_n \le 1, u_n \equiv 0$ trong lân cận của K. Và $u_n \nearrow X_{\Omega \setminus K}$ đều trên các tập compact trong $\Omega \setminus K$. Trong đó $X_{\Omega \setminus K}$ thay cho hàm đặc trưng của $\Omega \setminus K$. Vậy thì